

## 10. MODELAGEM DE CONVERSORES UTILIZANDO MODELO DA CHAVE PWM

As topologias básicas de conversores cc-cc possuem uma chave controlada e outra não-controlada associadas a elementos lineares invariantes no tempo. O conjunto destas duas chaves recebe o nome de chave PWM [10.1].

O objetivo neste capítulo é desenvolver um modelo linear para estas chaves, válido em torno do ponto de operação. O projeto adequado do compensador necessita um conhecimento do modelo matemático do comportamento do conversor frente a pequenas perturbações.

### 10.1 Propriedades invariantes das chaves PWM

A figura 10.1 mostra os conversores básicos, indicando terminais chamados **a**, **p** e **c**, denominados **ativo**, **passivo** e **comum**.

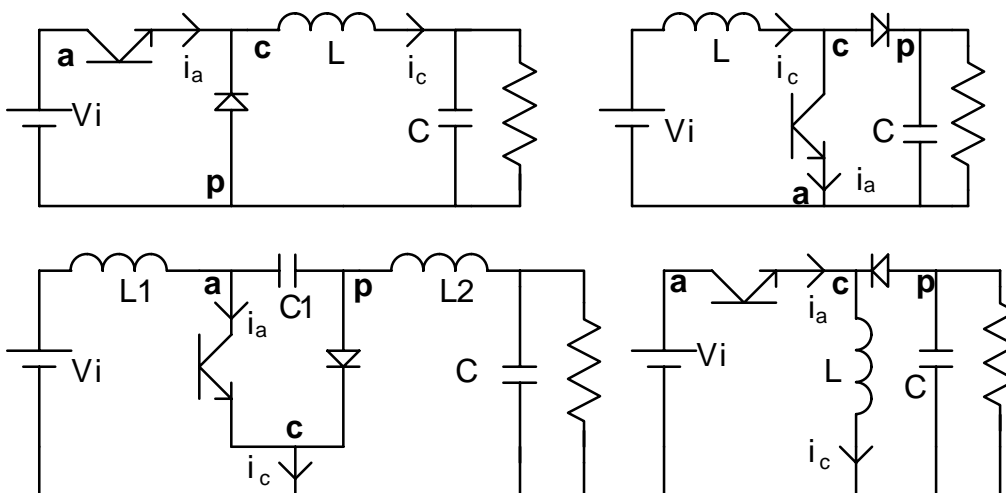


Figura 10.1 Conversores básicos indicando terminais ativo (a), passivo (p) e comum (c).

A chave pode ser modelada da seguinte forma:

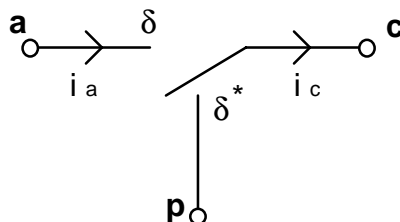


Figura 10.2 Modelo da chave PWM.

onde  $\delta$  é o ciclo de trabalho e  $\delta^* = (1 - \delta)$ , o seu complemento.

No **modo contínuo**,  $i_c$  será sempre diferente de zero. No intervalo  $(\delta \cdot \tau)$  (chave controlada fechada), independentemente da topologia, tem-se:

$$i_a(t) = i_c(t) \quad (10.1)$$

$$v_{ap}(t) = v_{cp}(t) \quad (10.2)$$

No intervalo complementar:

$$i_a(t) = 0 \quad (10.3)$$

$$v_{cp}(t) = 0 \quad (10.4)$$

Novamente, também neste tipo de análise, interessam os valores médios das variáveis (uma vez que se pretende utilizar ferramentas de análise linear de sistemas). No estudo do comportamento dinâmico, as perturbações estudadas serão, por hipótese, em frequência muito menor do que a frequência de chaveamento e de pequena amplitude.

As grandezas médias serão expressas por tipos maiúsculos, enquanto os termos relativos às perturbações serão indicados com uma letra em estilo script:  $d$ ,  $v$ , etc.

Pode-se demonstrar que a seguinte relação é verdadeira:

$$I_a = \delta \cdot I_c \quad (10.5)$$

Considerando as formas de corrente  $i_a(t)$  e  $i_c(t)$  mostradas na figura 10.3, e ainda a presença da resistência série do capacitor do filtro de saída, tem-se as ondas de  $v_{ap}(t)$  e  $v_{cp}(t)$  indicadas na figura 10.4, considerando e desprezando a ondulação na corrente.

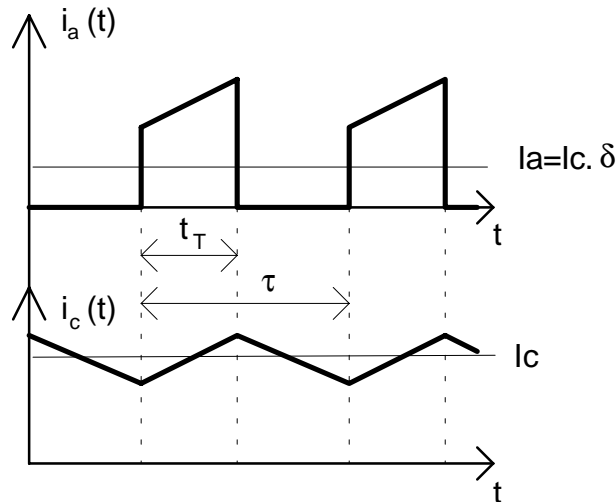


Figura 10.3 Corrente nos terminais ativo e comum.

A forma retangular de  $v_{ap}(t)$  (exceto no conversor abaixador, quando  $v_{ap}(t)$  é sempre igual à tensão de entrada), decorre, assim, da presença de resistência no caminho da corrente  $i_c(t)$ . Desprezando a ondulação desta corrente, a ondulação na tensão  $v_{ap}(t)$  pode ser dada por:

$$V_r = I_c \cdot R_e \quad (10.6)$$

onde  $R_e$  é função da resistência série equivalente do capacitor e da carga,  $R_o$ .

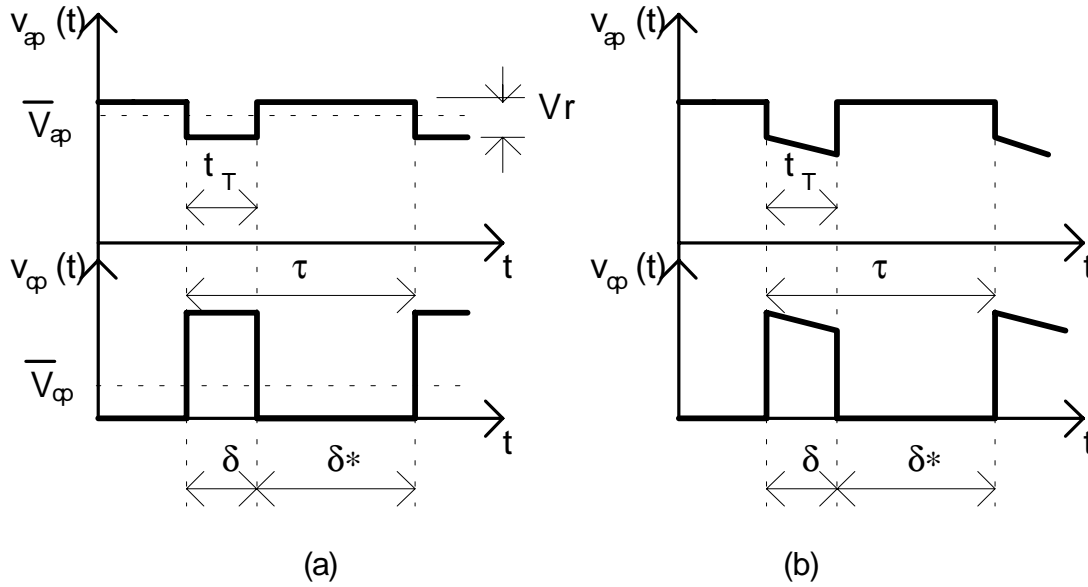


Figura 10.4 Tensões nos terminais da chave PWM sem (a) e com (b) a ondulação na corrente considerada.

Nos conversores elevador e abaixador-elevador, o capacitor de saída está em paralelo com a carga, de modo que o valor de  $R_e$  é a associação em paralelo de  $R_{se}$  e  $R$ . No conversor Cuk  $R_e = R_{se}$ .

Da figura anterior, pode-se obter:

$$\overline{V}_{cp} = \delta \cdot (\overline{V}_{ap} - I_c \cdot R_e \cdot \delta^*) \quad (10.7)$$

## 10.2 Modelo CC da chave PWM

Seja o ciclo de trabalho composto por uma componente de valor constante e uma perturbação:

$$\delta = D + d \quad (10.8)$$

Para um ciclo de trabalho constante ( $\delta = D$ ), e supondo que as variáveis sofram alguma perturbação devido a mudança na tensão de entrada ou na carga, tem-se:

$$(I_a + i_a) = D \cdot (I_c + i_c) \quad (10.9)$$

$$i_a = D \cdot i_c \quad (10.10)$$

$$v_{cp} = D \cdot v_{ap} - D^* \cdot D \cdot R_e \cdot i_c \quad (10.11)$$

Das equações anteriores, obtém-se o circuito equivalente dado na figura 10.5, no qual o "transformador" é um elemento fictício e que permite a transformação de tensões ca ou cc.

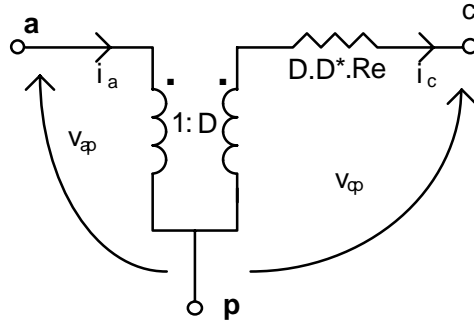


Figura 10.5 Circuito equivalente (fictício) para chave PWM com transformador CC.

### 10.3 Modelo CA da chave PWM

Para uma pequena perturbação no ciclo de trabalho, tem-se:

$$i_a = D \cdot i_c + I_c \cdot d \quad (10.12)$$

$$v_\phi = D \cdot (v_{\phi} + I_c \cdot R_e \cdot d - i_c \cdot R_e \cdot D^*) + d \cdot (V_{\phi} - I_c \cdot R_e \cdot D^*) \quad (10.13)$$

$$v_{\phi} = \frac{V_{\phi}}{D} + i_c \cdot R_e \cdot D^* - \left[ V_{\phi} + I_c \cdot (D - D^*) \cdot R_e \right] \cdot \frac{d}{D} \quad (10.14)$$

$$V_D = V_{\phi} + I_c \cdot R_e \cdot (D - D^*) \quad (10.15)$$

Destas equações pode-se representar a chave como mostrado na figura 10.6:

Na verdade, este modelo é geral, podendo ser usado para a análise CC fazendo-se  $d=0$  e  $i_c = I_c$ .

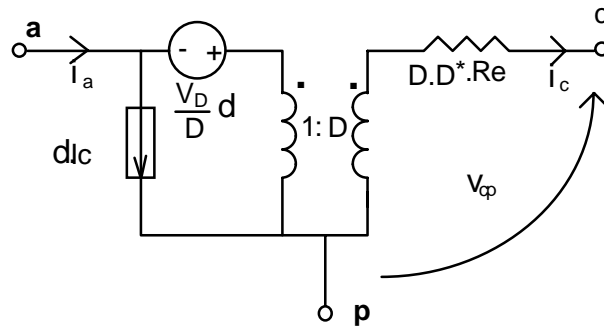


Figura 10.6 Modelo da chave CA

### 10.4 Efeito das perdas em condução e do tempo de armazenamento sobre o modelo da chave PWM

Especialmente para os transistores bipolares, o atraso decorrente do tempo de armazenamento provoca uma alteração no ciclo de trabalho efetivo do conversor, de modo que a perturbação no ciclo de trabalho pode ser representada por:

$$\delta_{ef} = \delta - \frac{i_c}{I_{me}} \quad (10.16)$$

onde  $I_{me}$  é um parâmetro que depende do tipo de circuito de acionamento de base do transistor.

Substituindo (16) em (12) e (14) chega-se a:

$$i_a = \left[ D - \frac{I_c}{I_{me}} \right] \cdot i_c + I_c \cdot d \quad (10.17)$$

$$v_{\varphi} = \frac{V_{\varphi}}{D} + i_c \cdot \left( R_e \cdot D^* + \frac{r_m}{D} \right) - \frac{V_D}{D} \cdot d \quad (10.18)$$

$$r_m = \frac{V_D}{I_{me}} \quad (\text{resistência modulada})$$

Como geralmente  $D \gg I_c/I_{me}$ , pode-se reescrever (10.17):

$$i_a = D \cdot i_c + I_c \cdot d \quad (10.19)$$

Isto significa que, no modelo, a inclusão do tempo de armazenamento não afeta o comportamento da corrente, mas apenas o da tensão, como se pode observar na figura 10.7, na qual são incluídas as resistências de condução do diodo ( $r_d$ ) e do transistor ( $r_t$ ).

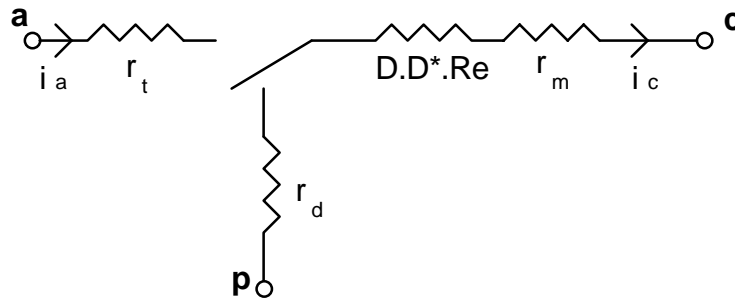


Figura 10.7 Modelo da chave incluindo resistências do diodo, do transistor e “modulada”.

$$V_{\varphi} = D \cdot (V_{\varphi} - I_c \cdot D^* \cdot R_e - I_c \cdot r_t) - D^* \cdot I_c \cdot r_d \quad (10.20)$$

Admitindo uma perturbação no ciclo de trabalho,  $\delta = D + d$  de (10.20) chega-se a:

$$v_{\varphi} = \frac{V_{\varphi}}{D} + i_c \cdot r_c - d \cdot \frac{V_D}{D} \quad (10.21)$$

$$r_c = r_m + D \cdot r_t + D^* \cdot r_d + D \cdot D^* \cdot R_e \quad (10.22)$$

$$V_D = V_{\varphi} + (D - D^*) \cdot I_c \cdot R_e + I_c \cdot (r_d - r_t) \quad (10.23)$$

O que leva ao modelo mostrado na figura 10.8:

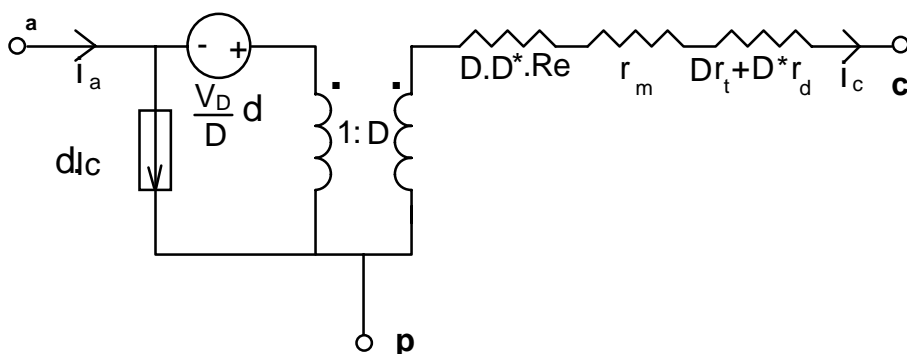


Figura 10.8 Modelo completo da chave PWM.

### 10.5 Análise do conversor abaixador de tensão

As seguintes relações serão obtidas:

$v_o(s)/v_i(s)$  : variação da saída frente a perturbação na entrada

$M = V_o/V_i$  : taxa de conversão

$Z_{in}$  : impedância de entrada

$Z_{out}$  : impedância de saída

$v_o(s)/\delta(s)$  : variação da saída frente a perturbação no ciclo de trabalho

O circuito (figura 10.9) e o modelo (figura 10.10) estão indicados a seguir.

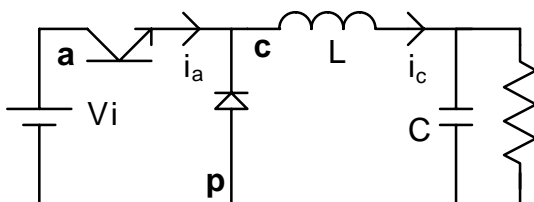


Figura 10.9 Conversor abaixador de tensão.

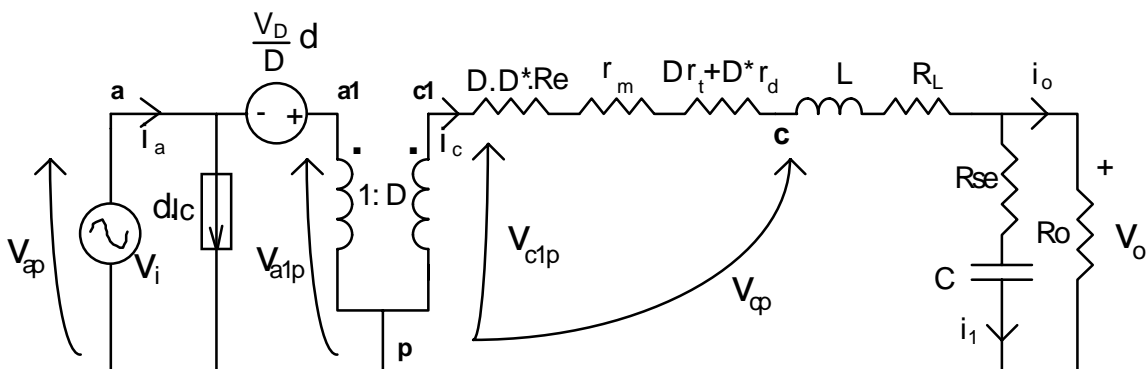


Figura 10.10 Modelo para o conversor abaixador de tensão.

### 10.5.1 Análise CC

Analisando o modelo, e considerando que: o ciclo de trabalho é constante ( $d = 0$ ); os indutores são representados apenas por suas resistências; os capacitores estão abertos; a tensão de entrada;  $V_i$  é constante;  $R_e = 0$ , obtém-se:

$$V_{ap} = V_i \quad (10.24)$$

$$V_{c1p} = D \cdot V_{ap} \quad (10.25)$$

$$V_{c1p} - V_o = (R_L + r_m + D \cdot r_t + D^* \cdot r_d) \cdot I_c \quad (10.26)$$

$$I_o = \frac{V_o}{R_o} \quad (10.27)$$

de cujas equações se obtém:

$$M = \frac{V_o}{V_i} = \frac{D \cdot R_o}{R_o + R_L + r_m + r_t \cdot D + r_d \cdot D^*} \quad (10.28)$$

Desprezando  $r_m$ ,  $R_L$ ,  $r_t$  e  $r_d$ , então:

$$M = \frac{V_o}{V_i} = D \quad (10.29)$$

### 10.5.2 Determinação de $v_o(s)/v_i(s)$

Admitindo ciclo de trabalho constante ( $d = 0$ ) e que a tensão de entrada sofra pequenas perturbações ( $v_i = V_i + v_i$ ), da inspeção do modelo tem-se:

$$D \cdot v_i - v_o = (r_m + D \cdot r_t + D^* \cdot r_d + R_L) \cdot i_c + L \cdot \frac{di_c}{dt} \quad (10.30)$$

$$v_o = R_o \cdot i_o \quad (10.31)$$

$$R_1 = r_m + D \cdot r_t + D^* \cdot r_d + R_L \quad (10.32)$$

$$v_o = R_{ss} \cdot i_1 + \frac{1}{C} \int i_1 \cdot dt \quad (10.33)$$

$$i_c = i_o + i_1 \quad (10.34)$$

Aplicando a transformada de Laplace às equações anteriores e resolvendo-se, chega-se ao diagrama de blocos mostrado na figura 10.11:

Pelo diagrama, obtém-se:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{\frac{D \cdot R_o \cdot (s \cdot C \cdot R_{se} + 1)}{(R_o \cdot C \cdot L + R_{se} \cdot C \cdot L)}}{s^2 + s \cdot \left[ \frac{C \cdot (R_o \cdot R_1 + R_o \cdot R_{se} + R_1 \cdot R_{se}) + L}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})} \right] + \frac{R_o + R_1}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{se})}} \quad (10.35)$$

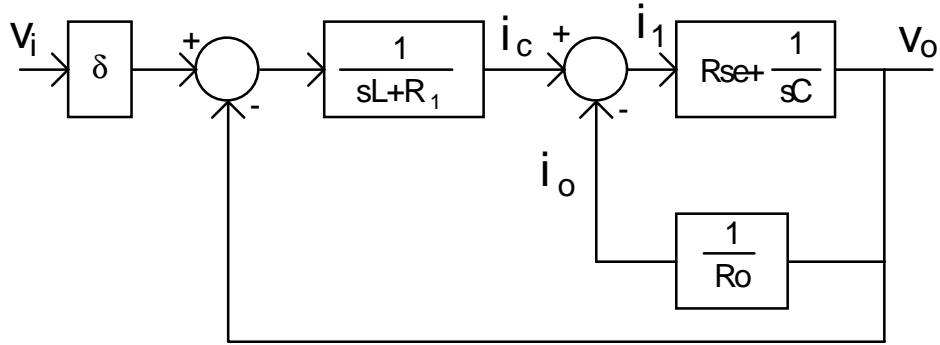


Figura 10.11 Diagrama de blocos do sistema.

Desprezando os elementos parasitas do modelo, recai-se na expressão clássica para o conversor:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = D \cdot \frac{\frac{1}{L \cdot C}}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R_o \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}} \quad (10.36)$$

Nota-se de (10.35) e (10.36) que o comportamento depende do ponto de operação, ou seja, do ciclo de trabalho.

### 10.5.3 Cálculo de $v_o(s)/ds$

Sabendo que  $V_{ap} = V_i$ , e admitindo  $v_i$  constante ( $\dot{v}_i = 0$ ) e que o ciclo de trabalho sofra pequena perturbação, da análise do modelo tem-se:

$$v_{ap} = v_{a1p} - V_D \cdot \frac{d}{D} = 0 \quad (10.37)$$

$$v_{c1p} = D \cdot v_{a1p} \quad (10.38)$$

o que resulta em:

$$v_{c1p} = V_D \cdot d \quad (10.39)$$

Como não existe ondulação de tensão em  $v_{ap}$  (já que para este conversor  $R_e = 0$ ), pode-se escrever, de (10.23):

$$V_D = V_i + I_c \cdot (r_d - r_t) \quad (10.40)$$

$$\text{Definindo } R_2 = r_d - r_t + R_L \quad (10.41)$$



chega-se ao seguinte sistema de equações, o qual leva ao diagrama de blocos mostrado na figura 10.12:

$$V_D \cdot d - v_o = R_2 \cdot i_c + L \cdot \frac{di_c}{dt} \quad (10.42)$$

$$v_o = R_o \cdot i_o \quad (10.43)$$

$$v_o = R_{\Sigma} \cdot i_1 + \frac{1}{C} \int i_1 \cdot dt \quad (10.44)$$

$$i_c = i_o + i_1 \quad (10.45)$$

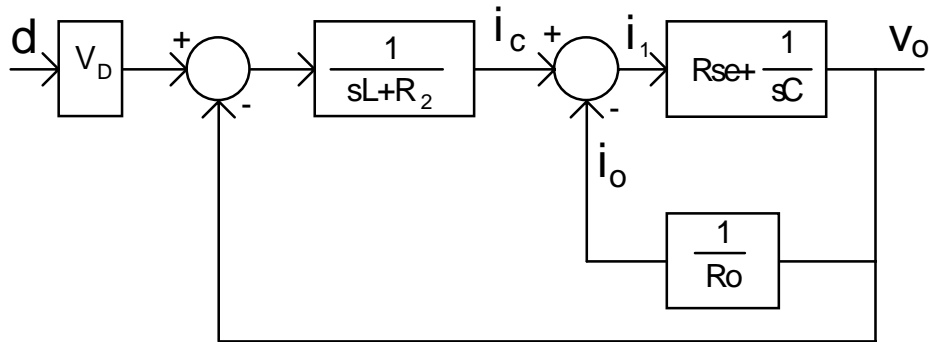


Figura 10.12 Diagrama de blocos do sistema.

Do circuito equivalente (figura 10.10) obtém-se:

$$\frac{v_o(s)}{d(s)} = V_D \cdot F(s) \quad (10.46)$$

$$F(s) = \frac{\frac{R_o \cdot (1 + s \cdot C \cdot R_{\Sigma})}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\Sigma})}}{s^2 + s \cdot \left[ \frac{C \cdot (R_o \cdot R_2 + R_o \cdot R_{\Sigma} + R_{\Sigma} \cdot R_2) + L}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\Sigma})} \right] + \frac{R_o + R_2}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\Sigma})}} \quad (10.47)$$

$$V_D = V_i + I_c \cdot (r_d - r_t) \quad (10.48)$$

Nota-se que a resposta independe do valor médio do ciclo de trabalho, ou seja, do ponto de operação.

A figura 10.13 mostra os diagramas de Bode da função de transferência entre a tensão de saída e o ciclo de trabalho, considerando e desprezando as resistências “parasitas” do modelo.

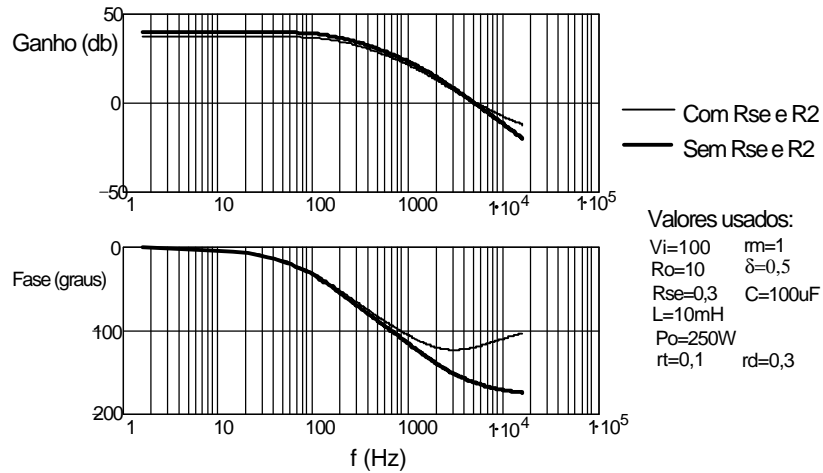


Figura 10.13 Diagramas de Bode relativos à figura 10.12.

### 10.5.4 Cálculo de $Z_{in}$ (impedância dinâmica de entrada)

Por definição:

$$Z_{in} = V_{in}(s)/I_{in}(s) \quad (10.49)$$

Do modelo,  $V_{in}(s) = v_i(s)$  e  $I_{in}(s) = i_a(s)$ . Admitindo um ciclo de trabalho constante ( $d = 0$ ), tem-se:

$$i_a = D \cdot i_c \quad (10.50)$$

Do diagrama de blocos tem-se:

$$\frac{i_c(s)}{D \cdot v_i(s)} = \frac{\frac{s \cdot C \cdot R_o}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\infty})} \cdot \left[ \frac{R_{\infty}}{R_o} + \frac{1}{s \cdot C \cdot R_o} + 1 \right]}{s^2 + s \cdot \left[ \frac{L + C \cdot (R_o \cdot (R_1 + R_{\infty}) + R_1 \cdot R_{\infty})}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\infty})} \right] + \frac{R_1 + R_o}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\infty})}} \quad (10.51)$$

$$E = s^2 + s \cdot \left[ \frac{L + C \cdot (R_o \cdot (R_1 + R_{\infty}) + R_1 \cdot R_{\infty})}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\infty})} \right] + \frac{R_1 + R_o}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\infty})} \quad (10.52)$$

$$Z_{in} = \frac{v_i(s)}{i_a(s)} = \frac{1}{D^2} \cdot \frac{E \cdot C \cdot L \cdot (R_o + R_{\infty})}{1 + s \cdot C \cdot (R_o + R_{\infty})} \quad (10.53)$$

### 10.5.5 Cálculo de $Z_{out}$ (impedância dinâmica de saída)

Por definição, curto-circuitando as fontes de tensão, e abrindo as fontes de corrente, tem-se:

$$Z_{out} = \left[ \frac{v_o(s)}{i_c(s)} \right] // R_o // \left[ R_{\infty} + \frac{1}{s \cdot C} \right] \quad (10.54)$$

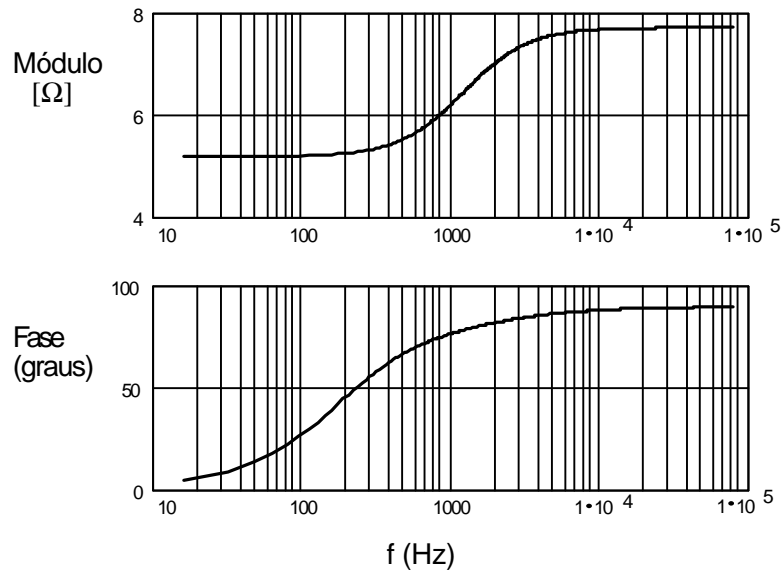


Figura 10.14 Comportamento da impedância de entrada.

Do diagrama de blocos,

$$\frac{V_o(s)}{i_c(s)} = s \cdot L + R_1 \quad (10.55)$$

Trabalhando as equações precedentes, tem-se:

$$Z_{out} = \frac{\frac{R_o \cdot R_1}{L \cdot C \cdot (R_o + R_{\infty})} \cdot \left[ 1 + \frac{s \cdot L}{R_1} \right] \cdot [1 + s \cdot C \cdot R_{\infty}]}{E} \quad (10.56)$$

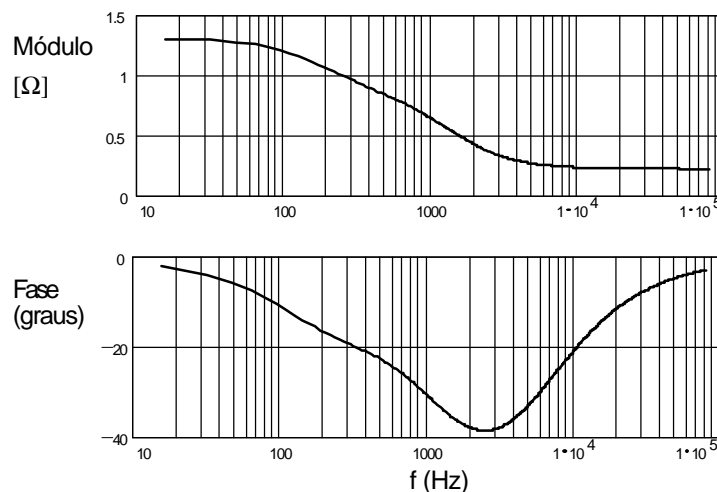


Figura 10.15 Comportamento da impedância de saída.

## 10.6 Referências Bibliográficas

- [10.1] Vorpérian, V.: "Simplify PWM Converter Analysis Using a PWM Switch Model". PCIM, March 1990, pp. 10-15.