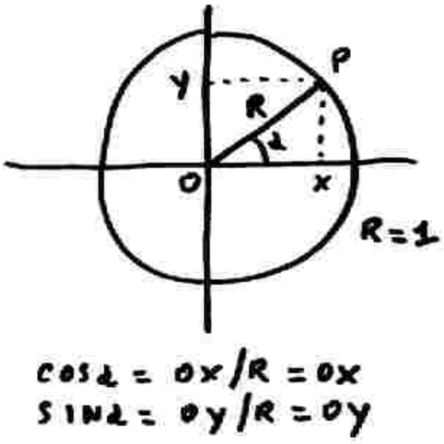
Notas para a realização de uma macro de roto-traslação

Introdução

A macro que iremos realizar não é muito complicada, precisa de um minimo de conhecimento de trigonometria. Por isso antes de escrevê-la enfrentaremos uma explicação dos conceitos de seno e cosseno, rotação e traslação. Só depois iremos enfrentar a escritura da macro.
(Vou ser muito simples, os matemáticos têm misericórdia de mim)

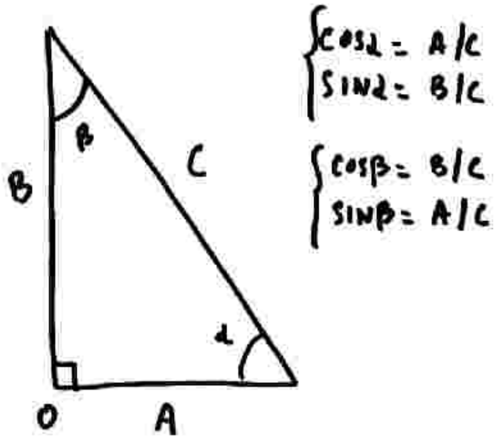
Simples elementos de trigonometria

A figura representa uma circunferência de raio unitário (hipótese).
Por definição chama-se cosseno do ângulo α a relação entre o cateto adjacente o ângulo (OX) e o raio (R), chama-se seno a relação entre o cateto frontal o ângulo (PX) e o raio (R). Sendo R=1 o cosseno resulta ser igual ao cateto adjacente enquanto o seno resulta ser igual ao cateto frontal formado triângulo retângulo POX.



Podemos então dizer que o cosseno e o seno representam os catetos de um triângulo retângulo (POX) com a hipotenusa igual a 1.

O conceito pode ser estendido a qualquer triângulo retângulo tendo conta que a hipotenusa (raio) pode ter qualquer valor. Estão sempre validos os conceitos acima apresentados.



Cada vez que nos encontramos um triângulo retângulo podemos aplicar estas formulas trigonométricas. Os valores do seno e cosseno não pode ser maior que 1 (hipotes da circunferência), isso quer dizer (Pitagora) que o quadrado da suma entre cosseno e seno é igual a 1.

$\sin^2+\cos^2=1$

A tangente (TAN) é a função trigonométrica que relaciona o seno com o cosseno

$\tan(\alpha)=\sin(\alpha)/\cos(\alpha)$ (maior a tangente, maior o seno)

Quando $\sin(\alpha)=\cos(\alpha)$ a tangente assume o valor igual a 1, o triangulo é com os lados iguais.

Isso é o que precisamos saber sobre a trigonometria.

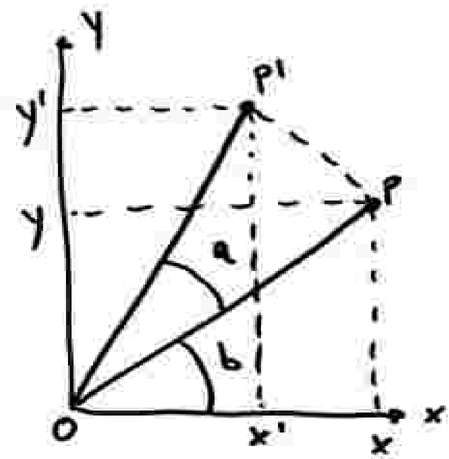
Agora que temos uma ideia do significado de seno e cosseno podemos entender melhor o conceito de rotação e traslação.

Traslar um ponto (origem) significa mudar de posição, rodar significa mudar de posição em relação a um ponto (a mudança é feita por cima de uma imaginaria circunferência). E' possível rodar e traslar conjuntamente.

Nossa tarefa é achar umas formulas para calcular os novos pontos (a nova origem) depois de ter efetuado uma traslação ou rotação ou as duas.

<u>Estúdio rotação geométrica</u>

Vamos considerar o plano XY, um ponto P que vai ser rodado por um ângulo a.
A questão é como calcular a nova posição (P1) de P?



Seja b o ângulo formado pela linha passante por P e o centro O, então o ângulo entre o eixo X e a linha passante por P' será a+b.
Podemos portanto escrever (definição)

$\cos(a+b)=X'/OP'$ e $\sin(a+b)=y'/OP'$

consegue que

$X'= OP' * \cos(a+b)$
$Y'= OP' * \text{sen}(a+b)$

A trigonometria além de definir o seno e o cosseno expressa também as relações entre os ângulos através di varias formulas. Duas dessas, as fórmulas de adição, é o que nos iremos usar para nosso estudo

cos (a+b) = cos(a)*cos(b) - sin(a)*sin(b)
sin (a+b) = sin(a)*cos(b) + cos(a)*sin(b)

Agora é só usar essas formulas

X'= OP' * (cos(a)*cos(b) - sin(a)*sin(b))
Y'= OP' * (sin(a)*cos(b) + cos(a)*sin(b))

X'= OP'*cos(a)*cos(b) - OP'*sin(a)*sen (b)
Y'= OP'*sin(a)*cos(b) + OP'*cos(a)*sin(b)

Considere os triângulos XOP e X'OP' são semelhantes, quer dizer da mesma forma e e com OP=O'P'. Então

X = OP*cos (b) = OP'*cos(b)
Y = OP*sin (b) = op'*sin(b)

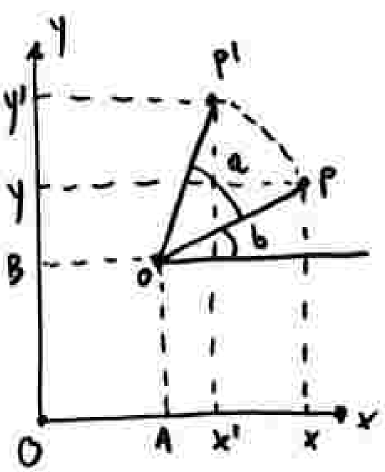
substituindo nas relações acima obtemos

X'= X*cos(a) - Y*sin(a)
Y'= X*sin(a) + Y*cos(a)

Fantástico! Achamos duas fórmulas para o cálculo do ponto de P'(X', Y') que dependem do ponto P(X, Y) e do ângulo a.

E' o que nos queríamos!

Agora, se o ponto de rotação não fica no centro da origem do sistema cartesiano, é só considerar o deslocamento do ponto de rotação em relação a origem



X'= X+A   Y'=Y+B

então

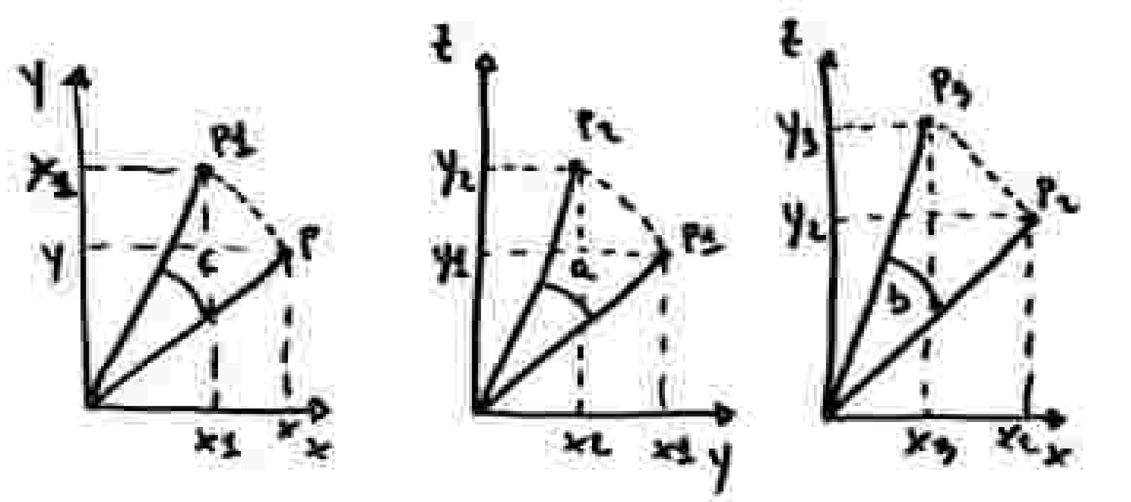
X'= A + X*cos(a) - Y*sin(a)
Y'= X + B*sin(a) + Y*cos(a)

O que descrevi é o comportamento de cada cnc na qual foi aplicada a função G68(rotação).

Bem, agora o assunto vai complicar-se.

Considere o espaço tridimensional XYZ.

Uma qualquer rotação pode sempre ser decomposta em uma sequência de rotações sobre os eixos ortogonais. Isto significa que o estudo feito anteriormente permanece válido, será aplicado aos eixos interessados …



Por isso podemos escrever

X1 = X*cos(c) - Y*sin(c)
Y1 = X*sin(c) + Y*cos(c)
Z1 = Z

Y2 = Y1*cos(a) - Z1*sin(a)
Z2 = Y1*sin(a) + Z1*cos(a)
X2 = X1

Z2 = Z3*cos(b) - X2*sin(b)
X3 = Z2*sin(b) + X2*cos(b)

Não tem nada de novo, somente aplicamos as formulas encontradas anteriormente aos planos XY, YZ, XZ.
(Lembre-se que: a rotação em torno do eixo Z define o eixo C, a rotação em torno do eixo X define o eixo A, a rotação em torno do eixo Y define o eixo B)

Considere-se uma máquina com 4 eixos, temos a rotação respeito a um eixo de que já sabemos a fórmula.
Para uma máquina de 5 eixos deve-se aplicar 2 rotações em seguida

X1 = X*cos(c) - Y*sin(c)
Y1 = X*sin(c) + Y*cos(c)
Z1 = Z

Y2 = Y1*cos(a) - Z1*sin(a)
Z2 =Y1*sin(a) + Z1*cos(a)
X2 = X1

substituindo a primeira na segunda

X2 = X*cos(c) - Y*sin(c)
Y2 = (X*sin(c) + Y*cos(c)) * cos(a) - Z*sin(a)
Z2 = (X*sin(c) + Y*cos(c)) * sin(a) + Z*cos(a)

Muito bem, **esta é a relação que expressa o novo ponto após uma dupla rotação!**
Nota-se muito bem: o ponto 2 esta relacionado com outro ponto (1) em função de XYZ (1) e dos ângulos (a) e (c).

Mas se o centro de rotação não fica na origem dos eixos cartesianos?
Mesmo para o espaço tridimensional vale o argumento apresentado para o plano: é

preciso adicionar o deslocamento nas equações.

X2 = A + X*cos(c) - Y*sin(c)
Y2 = B + (X*sin(c) + Y*cos(c)) * cos(a) - Z*sin(a)
Z2 = C + (X*sin(c) + Y*cos(c)) * sin(a) + Z*cos(a)

Chegamos, assim, a definição de determinadas regras que nos permitem calcular o novo ponto, em seguida, a nova origem.
Agora temos que aplicá-las.