

5. ENGRENAGENS – Conceitos Básicos

5.1 Tipos de Engrenagens

Engrenagens Cilíndricas Retas: Possuem dentes paralelos ao eixo de rotação da engrenagem. Transmitem rotação entre eixos paralelos. Um exemplo é mostrado na Fig. 5.1.



Fig. 5.1: Engrenagens Cilíndricas Retas

Engrenagens Cilíndricas Helicoidais: Possuem dentes inclinados em relação ao eixo de rotação da engrenagem. Podem transmitir rotação entre eixos paralelos e eixos concorrentes (dentes hipoidais). Podem ser utilizadas nas mesmas aplicações das E.C.R.. Neste caso são mais silenciosas. A inclinação dos dentes induz o aparecimento de forças axiais. Um exemplo é mostrado na fig. 5.2.



(a)



(b)

Fig. 5.2: Engrenagens Cilíndricas Helicoidais – a: Eixos paralelos; b: Eixos concorrentes

Engrenagens Cônicas: Possuem a forma de tronco de cones. São utilizadas principalmente em aplicações que exigem eixos que se cruzam (concorrentes). Os dentes podem ser retos ou inclinados em relação ao eixo de rotação da engrenagem. Exemplos deste tipo de engrenagens estão mostrados na Fig. 5.3.



Fig. 5.3: Engrenagens Cilíndricas Cônicas

Parafuso sem fim – Engrenagem coroa (Sem fim-coroa): O sem fim é um parafuso acoplado com uma engrenagem coroa, geralmente do tipo helicoidal. Este tipo de engrenagem é bastante usado quando a relação de transmissão de velocidades é bastante elevada (Fig. 5.4).



Fig. 5.4: Parafuso Sem fim - Coroa

Pinhão-Cremalheira: Neste sistema, a coroa tem um diâmetro infinito, tornando-se reta. Os dentes podem ser retos ou inclinados. O dimensionamento é semelhante às engrenagens cilíndricas retas ou helicoidais. Na Fig. 5.5 está mostrado um exemplo

destas engrenagens. Consegue-se através deste sistema transformar movimento de rotação em translação.

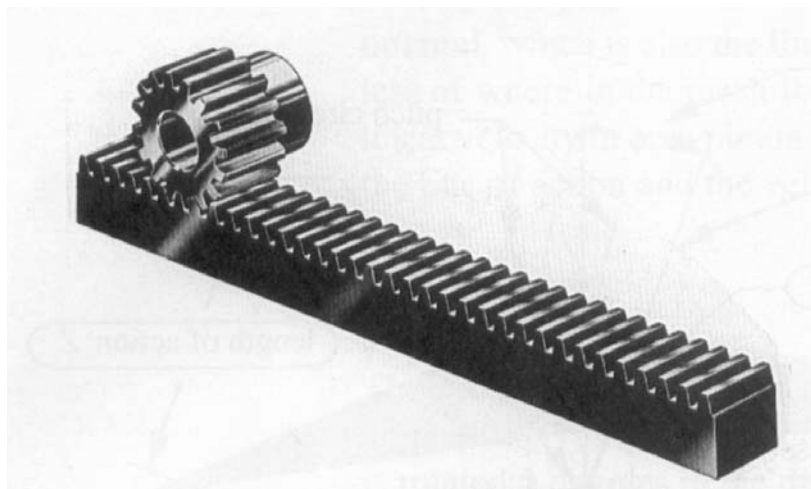


Fig. 5.5: Engrenagens Pinhão-cremalheira

5.1 Nomenclatura

A nomenclatura de engrenagens está mostrada na fig. 5.6.

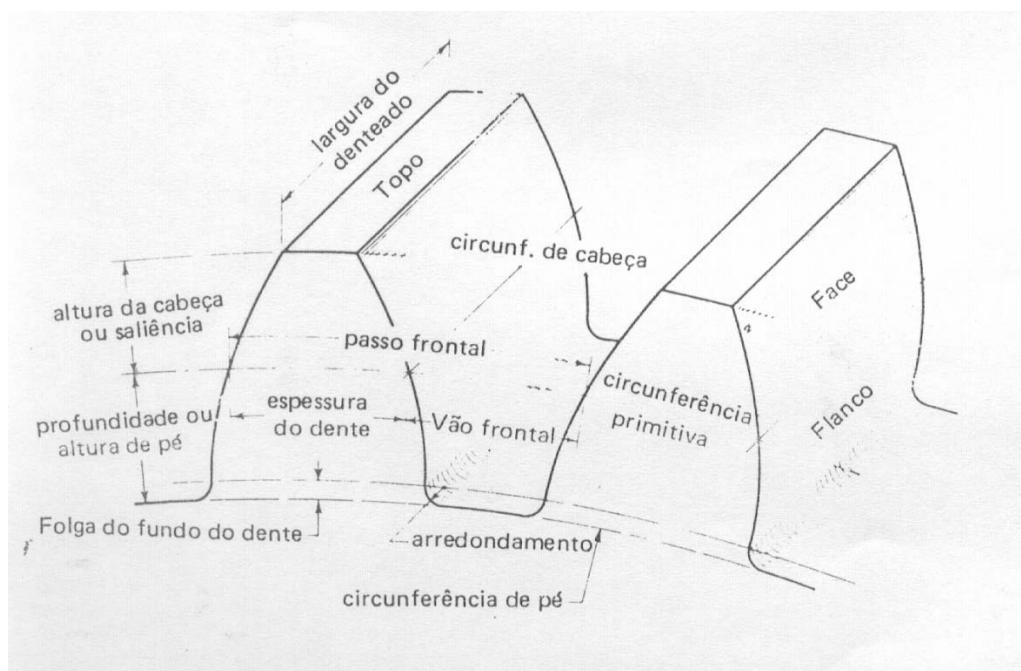


Fig. 5.6: Nomenclatura – Engrenagens Cilíndricas Retas

Circunferência Primitiva: É uma circunferência teórica sobre a qual todos os cálculos são realizados. As circunferências primitivas de duas engrenagens acopladas são tangentes. O diâmetro da circunferência primitiva é o diâmetro primitivo (d).

Passo frontal (p): É a distância entre dois pontos homólogos medida ao longo da circunferência primitiva.

Módulo (m): É a relação entre o diâmetro primitivo e o número de dentes de uma engrenagem. O módulo é a base do dimensionamento de engrenagens no sistema internacional. Duas engrenagens acopladas possuem o mesmo módulo. A figura 5.7 mostra a relação entre o módulo e o tamanho do dente. O módulo deve ser expresso em milímetros.

Passo Diametral (P): É a grandeza correspondente ao módulo no sistema inglês. É o número de dentes por polegada.

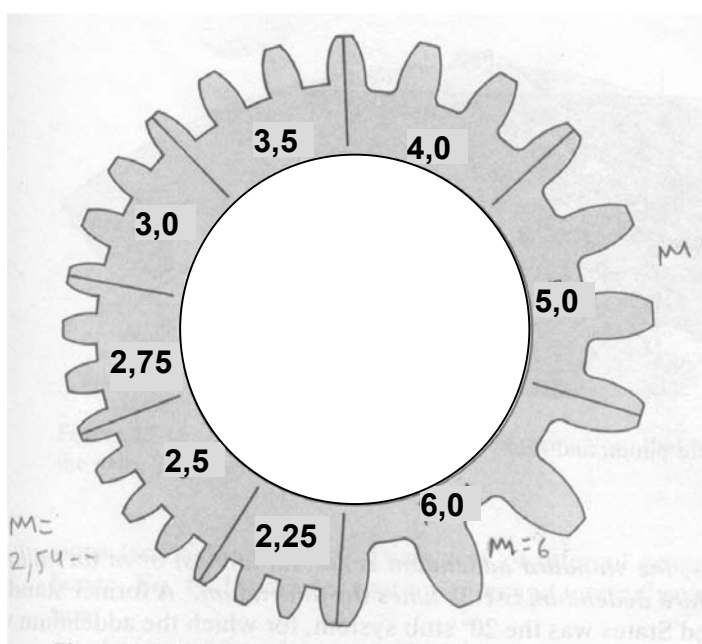


Fig. 5.7: Relação entre Módulo (mm) e tamanho de dente

Altura da Cabeça do Dente ou Saliência (a): É a distância radial entre a circunferência primitiva e a circunferência da cabeça.

Altura do pé ou Profundidade (b): É a distância radial entre a circunferência primitiva e a circunferência do pé.

Altura total do dente (h_t): É a soma da altura do pé com a altura da cabeça, ou seja, $h_t = a + b$.

Ângulo de ação ou de pressão (ϕ): É o ângulo que define a direção da força que a engrenagem motora exerce sobre a engrenagem movida. A figura 5.8 mostra que o

pinhão exerce uma força na coroa, formando um ângulo (ϕ) com a tangente comum às circunferências primitivas (tracejadas na figura).

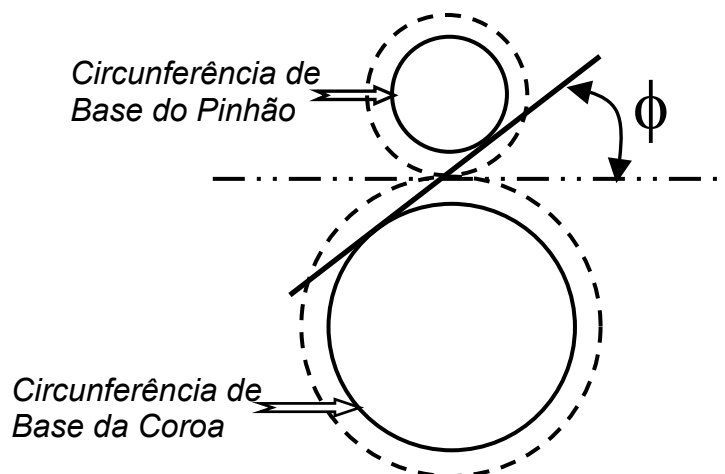


Fig. 5.8: Ângulo de ação de duas engrenagens acopladas

Circunferência de base: É a circunferência em torno da qual são gerados os dentes.

Equações Básicas:

$$m = \frac{d}{N} \quad (5.1)$$

N é o número de dentes da engrenagem.

$$p = \frac{\pi d}{N} = \pi m \quad (5.2)$$

$$P = \frac{N}{d} = \frac{25,4}{m} \quad (5.3)$$

O diâmetro da circunferência de base (d_b) é calculado pela Equação:

$$d_b = d \cos \phi \quad (5.4)$$

Um par de engrenagens onde o pinhão gira com rotação de n_p rpm e a coroa com rotação de n_c rpm apresenta a seguinte relação cinemática:

$$\frac{n_p}{n_c} = \frac{N_c}{N_p} = \frac{d_c}{d_p} \quad (5.5)$$

5.2 Sistemas de Dentes

Um sistema de dentes é um padrão, normalizado, onde todas as dimensões de uma engrenagem são fixadas em função do módulo. A Tab. 5.1 mostra as dimensões para ângulos de ação de 20, 22½ e 25°.

Tab. 5.1: Padrões de dentes – E.C.R – **m = módulo**

Sistema	Ângulo de ação (°)	Altura da cabeça do dente	Altura do pé do dente
Normal	20	1.m	1,25.m
	22½	1.m	1,25.m
	25	1.m	1,25.m
Rebaixado	20	0,8.m	1.m

Módulos padronizados (mm):

0,2 ≤ m ≤ 1,0	Variação: 0,1 mm	16,0 ≤ m ≤ 24,0	Variação: 2,0 mm
1,0 ≤ m ≤ 4,0	Variação: 0,25 mm	24,0 ≤ m ≤ 45,0	Variação: 3,0 mm
4,0 ≤ m ≤ 7,0	Variação: 0,5 mm	45,0 ≤ m ≤ 75,0	Variação: 5,0 mm
7,0 ≤ m ≤ 16,0	Variação: 1,0 mm		

Módulos mais usados: 1 – 1,25 – 1,5 – 2 – 2,5 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 10 – 12
16 – 20 – 25 – 32 – 40 – 50 mm.

Segunda Escolha: 1,125 – 1,375 – 1,75 – 2,25 – 2,75 – 3,5 – 4,5 – 5,5 – 7 – 9 – 11 – 14 – 18 – 22 – 28 – 36 – 45 mm.

5.3 Análise de Forças

Nomenclatura a ser utilizada:

- Eixos e árvores: a, b, c,... Engrenagens: 1, 2, 3....

Exemplos: F_{23} = Força que a engrenagem 2 exerce sobre a engrenagem 3.

F_{4a} = Força que a engrenagem 4 exerce sobre a árvore (a).

- A direção e tipo de forças atuantes serão indicados pelas letras em superescritos: x, y, z = Direção; t = tangencial; r = radial; a = axial.

Exemplo: F_{23}^t = Força tangencial que a engrenagem 2 exerce sobre a engrenagem 3.

5.3.1 Engrenagens Cilíndricas Retas

As forças atuantes em um par de engrenagens cilíndricas retas estão mostradas na Fig. 5.9. As engrenagens transmitem força ao longo da linha de ação, que forma o ângulo (ϕ) mostrado.

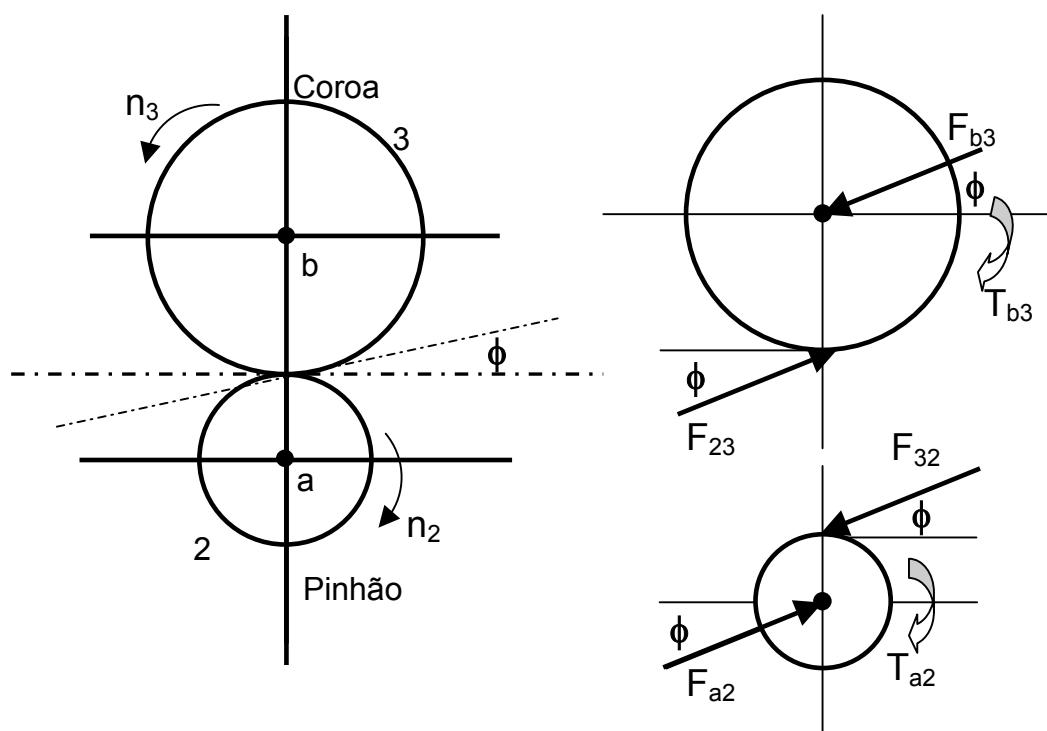


Fig 5.9: Forças em Engrenagens Cilíndricas Retas

As forças atuantes nas engrenagens podem ser decompostas nas direções radiais (F_{32}^r) e tangenciais (F_{32}^t), como mostrado na Fig. 5.9a.

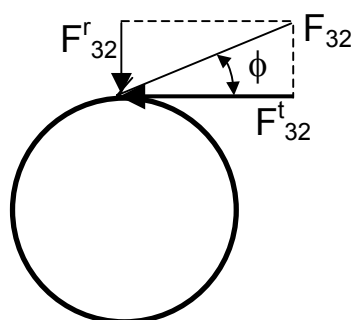


Fig 5.9a: Forças tangencial e radial em Engrenagens Cilíndricas Retas

Somente a componente tangencial transmite potência (Força útil). A componente radial tende a separar as árvores. Fazendo $F^t = W_t$, o torque transmitido (T) pelas engrenagens pode ser calculado por:

$$T = W_t \cdot \frac{d}{2} \quad (5.6)$$

A potência transmitida (H) pode ser calculada pela equação:

$$H = W_t \cdot V = T \cdot \omega \quad (5.7)$$

v = velocidade tangencial da engrenagem – $v = \pi d n$

ω = Velocidade angular da engrenagem

Interferência entre engrenagens cilíndricas retas

Interferência entre duas engrenagens existe quando o contato entre os dentes ocorre fora do perfil gerado. A interferência deve ser evitada no dimensionamento de engrenagens. Para evitar interferência devem ser determinados os números mínimos de dentes:

O número mínimo de dentes que um pinhão pode ter (N_P) para evitar interferência é:

$$N_P = \frac{2k}{(1 + 2m_G) \sin^2 \phi} \left(m_G + \sqrt{m_G^2 + (1 + 2m_G) \sin^2 \phi} \right) \quad (5.8)$$

$k = 1$ para engrenagens normais e $k = 0,8$ para engrenagens rebaixadas;

$m_G = N_C/N_P$ = Relação do número de dentes do pinhão e da coroa.

Exemplo: $m_G = 4$; $k = 1$; $\phi = 20^\circ$. O número mínimo de dentes $N_P = 15,4 = 16$ dentes. Assim, um pinhão de 16 dentes poderá se acoplar com uma coroa de 64 dentes sem que haja interferência.

O número máximo de dentes (N_C) que uma coroa pode se acoplar com um pinhão com número de dentes igual a N_P sem que haja interferência é:

$$N_C = \frac{N_P^2 \sin^2 \phi - 4k^2}{4k - 2N_P \sin^2 \phi} \quad (5.9)$$

Exemplo: Para um pinhão com 13 dentes, $k=1$ e ângulo de ação $\phi = 20^\circ$: $N_C = 16,45 = 16$ dentes. Para este pinhão, o número máximo de dentes que a coroa pode ter sem que haja interferência são 16 dentes.

5.3.2 Engrenagens Helicoidais

As engrenagens helicoidais possuem os dentes inclinados com um ângulo (ψ) em relação ao seu eixo de rotação. A fig. 5.10 mostra uma comparação esquemática entre engrenagens cilíndricas retas e engrenagens cilíndricas helicoidais. Pode-se considerar que o ângulo da hélice é zero nas engrenagens cilíndricas retas.

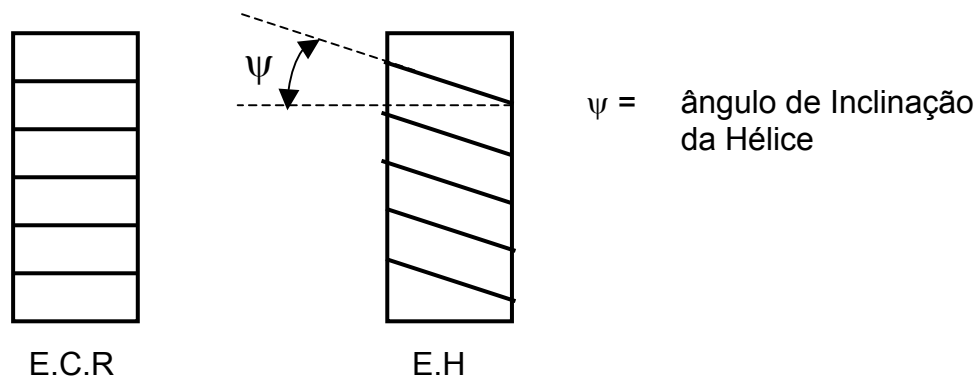


Fig 5.10: Engrenagens cilíndricas: reta e helicoidal

A nomenclatura das engrenagens helicoidais está mostrada na Fig. 5.11:

- As linhas **ab** e **cd** são as linhas de centro de dois dentes adjacentes.
- A distância **ac** é o passo frontal (p).
- A distância **ae** é o passo normal (p_n). Este passo é medido em uma direção perpendicular ao dente. $p_n = p \cdot \cos(\psi)$.

- A distância **ad** é o passo axial (p_x). $P_x = \frac{p}{\tan \psi}$

- Usa-se nas engrenagens helicoidais o módulo normal (m_n). Tem-se:

$$m_n = m \cdot \cos \psi = \frac{p \cdot \cos \psi}{\pi} \quad (5.10)$$

- O ângulo de pressão (ϕ_n) medido na direção perpendicular aos dentes (secção BB) na figura é diferente do ângulo de ação medido na direção de rotação (ϕ):

$$\operatorname{tg} \phi_n = \cos \psi . \operatorname{tg} \phi \quad (5.11)$$

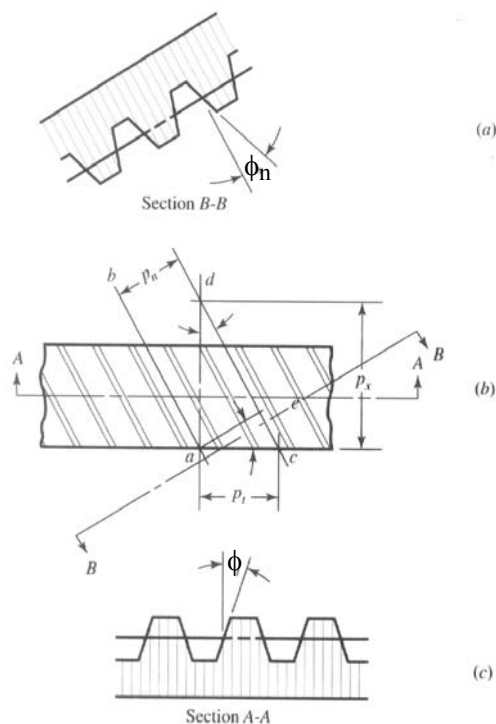


Fig 5.11: Nomenclatura e definições em engrenagens cilíndricas helicoidais

Uma outra maneira de mostrar os cortes dos dentes de uma engrenagem helicoidal está mostrada na Fig. 5.12.

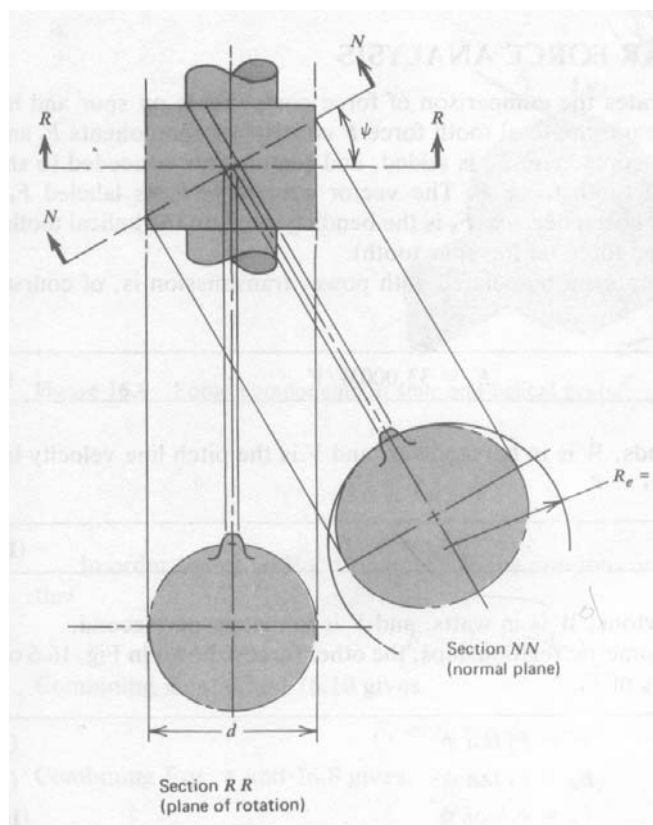


Fig 5.12: corte em engrenagens cilíndricas helicoidais

Interferência entre engrenagens helicoidais

Semelhante à equação (5.8), usada para E.C.R., o número mínimo de dentes que um pinhão com dentes helicoidais pode ter (N_P) para evitar interferência é:

$$N_P = \frac{2k \cdot \cos \psi}{(1 + 2m_G) \sin^2 \phi} \left(m_G + \sqrt{m_G^2 + (1 + 2m_G) \sin^2 \phi} \right) \quad (5.12)$$

O número máximo de dentes (N_C) que uma coroa pode se acoplar com um pinhão com número de dentes igual a N_P sem que haja interferência é:

$$N_C = \frac{N_P^2 \sin^2 \phi - 4k^2 \cos \psi}{4k \cos \psi - 2N_P \sin^2 \phi} \quad (5.13)$$

As forças atuantes em um par de engrenagens helicoidais estão mostradas na Fig. 5.13.

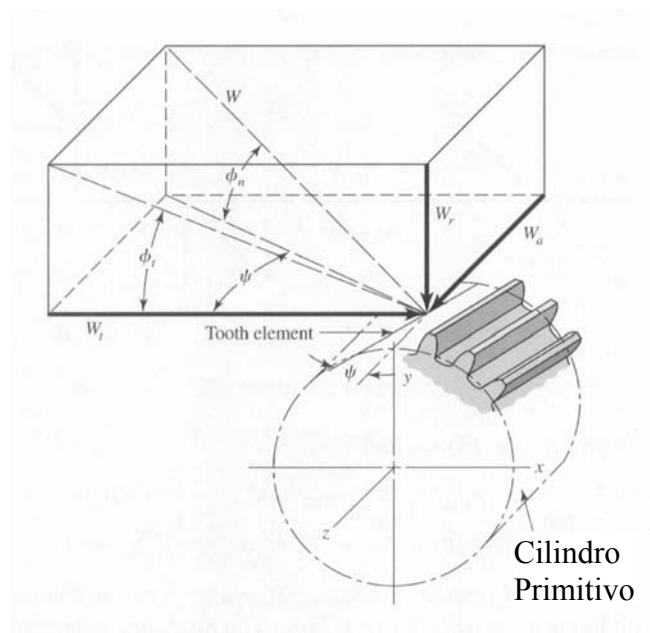


Fig 5.13: Forças atuantes em engrenagens cilíndricas helicoidais

As forças radiais (W_r), tangenciais (W_t) e axiais (W_a) são calculadas através das equações:

$$W_r = W \sin \phi_n = W_t \tan \phi$$

$$W_t = W \cos \phi_n \cos \psi \quad (5.14)$$

$$W_a = W \cos \phi_n \sin \psi = W_t \tan \psi$$

$$W = \frac{W_t}{\cos \phi_n \cos \psi}$$

5.3.3 Engrenagens Cônicas

A terminologia das engrenagens cônicas está mostrada na Fig. 5.14. O passo e o módulo são medidos no diâmetro primitivo da engrenagem.

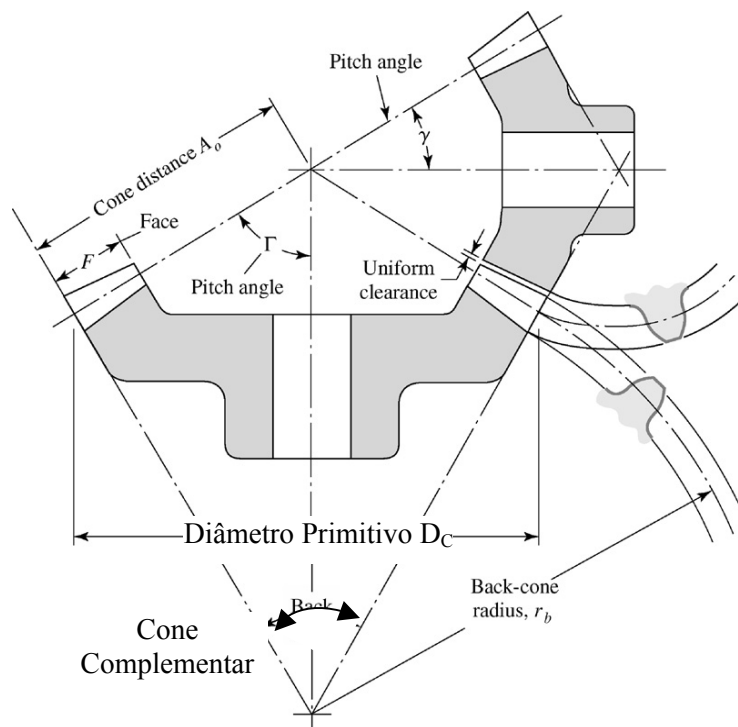


Fig. 5.14: Nomenclatura de engrenagens cônicas

γ - ângulo primitivo do pinhão; d_p = Diâmetro primitivo do pinhão;

Γ - ângulo primitivo da coroa; D_C = Diâmetro primitivo da coroa;

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{N_p}{N_C} \quad \operatorname{tg} \Gamma = \frac{N_C}{N_p} \quad (5.15)$$

O número virtual de dentes de uma engrenagem cônica (N') é:

$$N' = \frac{2\pi r_b}{p} \quad (5.16)$$

r_b é o raio do cone complementar.

As forças atuantes em uma engrenagem cônica estão mostradas na Fig. 5.15. Considera-se que as forças estão atuando no ponto central do dente.

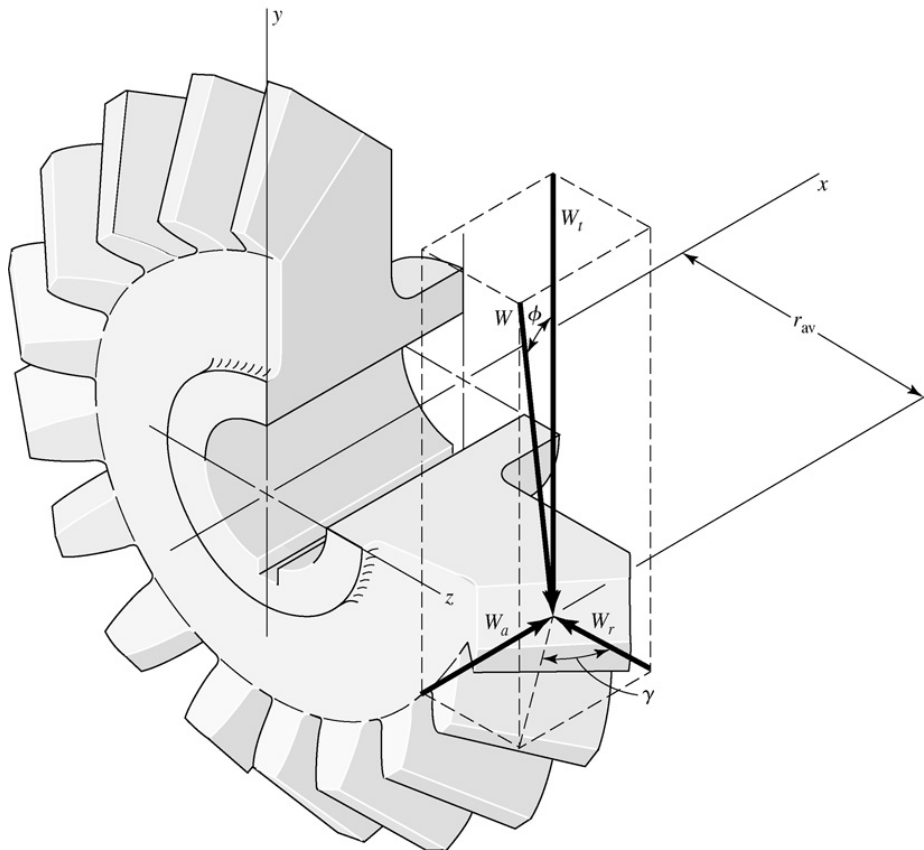


Fig 5.15: Forças atuantes em engrenagens cônicas

As forças radiais (W_r), tangenciais (W_t) e axiais (W_a) são calculadas através das equações:

$$W_t = \frac{T}{r_{av}}$$

$$W_r = W_t \operatorname{tg} \phi \cos \gamma \quad (5.17)$$

$$W_a = W_t \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \gamma$$

r_{av} é o raio primitivo (metade do diâmetro primitivo).

5.3.4 Parafuso Sem fim - Coroa

O par sem fim coroa consiste do acoplamento de um parafuso com uma engrenagem (a coroa). Consegue-se através deste par grandes reduções ($i \approx 100:1$). Na Fig. 5.16 está mostrada uma representação esquemática de um sem fim – coroa.

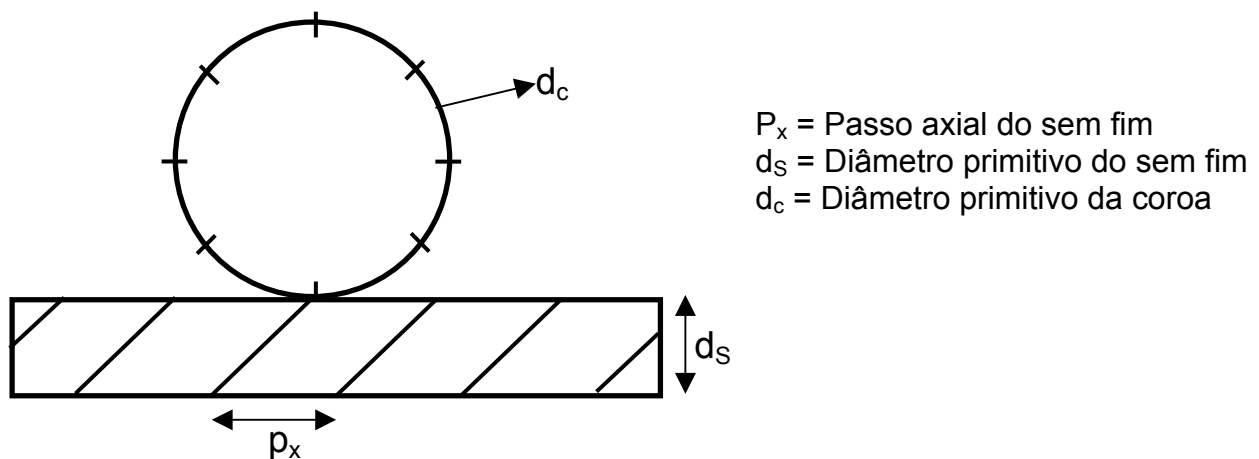


Fig. 5.16: Representação esquemática de um par sem fim - coroa

Para que haja engrenamento, o passo axial do sem fim deve ser igual ao passo normal da coroa (engrenagem helicoidal), ou seja: $p_x = p_N$. O ângulo de avanço do parafuso (λ) é dado por

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{L}{\pi d_S} \quad \text{e} \quad L = p_x N_S \quad (5.18)$$

L é o avanço do parafuso. N_S é o número de entradas do parafuso.

A fig. 5.17 mostra o ângulo de avanço do parafuso.

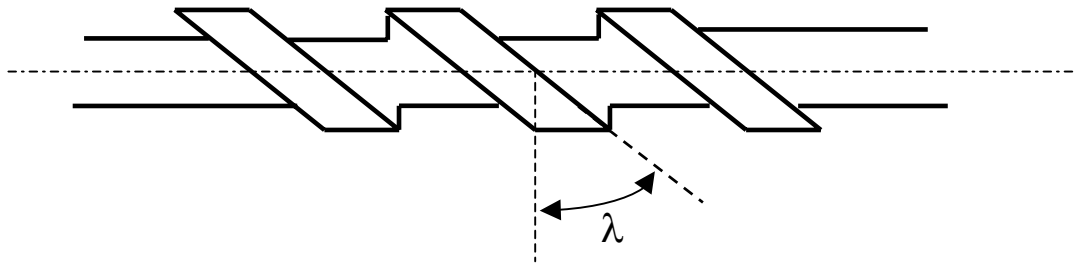


Fig. 5.17: Ângulo de avanço do parafuso sem fim

O diâmetro do parafuso sem fim (d_s), deve obedecer à relação, onde C é a distância entre centros:

$$\frac{C^{0,875}}{3} \leq d_s \leq \frac{C^{0,875}}{1,6} \quad (5.19)$$

A nomenclatura do par sem fim-coroa está mostrada na Fig. 5.18.

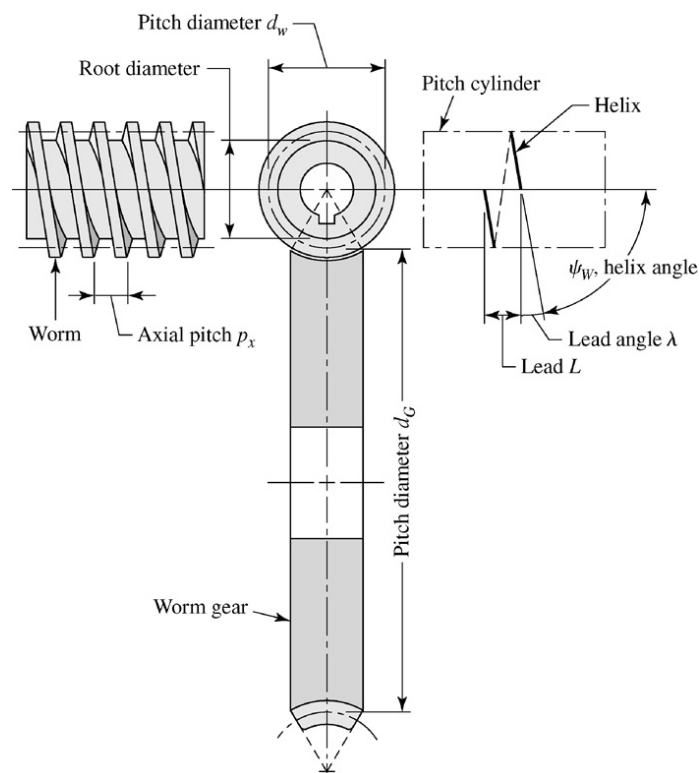


Fig. 5.18: Nomenclatura de um par sem fim - coroa

$$W^X = W \cos \phi_n \sin \lambda$$

$$W^Y = W \sin \phi_n \quad (5.20)$$

$$W^Z = W \cos \phi_n \cos \lambda$$

As forças nas direções X, Y e Z são:

$$W_{St} = -W_{Ca} = W^X$$

$$W_{Sr} = -W_{Cr} = W^Y \quad (5.21)$$

$$W_{Sa} = -W_{Ct} = W^Z$$

Em um par sem fim – coroa existe uma força de atrito que NÃO pode ser desprezada.

Considerando-se o atrito, com coeficiente de atrito (f), as forças atuantes são:

$$W^X = W(\cos \phi_n \sin \lambda + f \cos \lambda)$$

$$W^Y = W \sin \phi_n \quad (5.22)$$

$$W^Z = W(\cos \phi_n \cos \lambda - f \sin \lambda)$$

A relação entre as forças tangenciais no parafuso (W_{St}) e na coroa (W_{Ct}) pode ser determinada pela equação:

$$W_{St} = W_{Ct} \frac{\cos \phi_n \sin \lambda + f \cos \lambda}{f \sin \lambda - \cos \phi_n \cos \lambda} \quad (5.23)$$

O rendimento do par sem fim – coroa (η) é:

$$\eta = \frac{\cos \phi_n - f \cdot \tan \lambda}{\cos \phi_n + f \cdot \cot \lambda} \quad (5.24)$$

O coeficiente de atrito (f) em um par sem fim – coroa depende da velocidade de escorregamento (V_d) e do parafuso sem fim (V_S). A Fig. 20 mostra as velocidades atuantes.

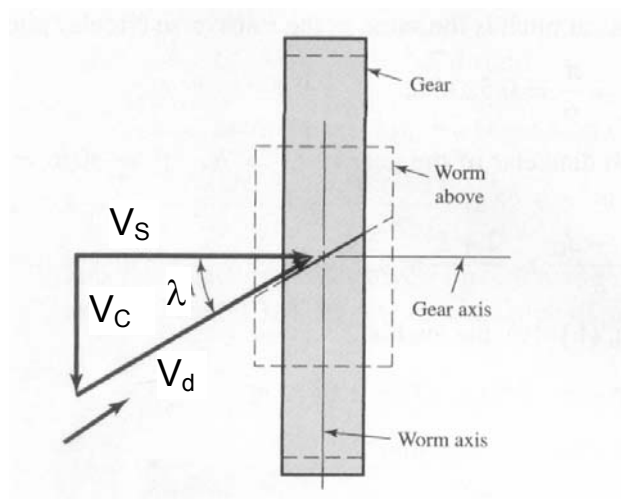


Fig. 5.20: Velocidades atuantes no par sem fim – coroa

A equação abaixo mostra a relação entre as velocidades de escorregamento e do parafuso sem fim.

$$V_d = \frac{V_S}{\cos \lambda} \quad (5.25)$$

Uma estimativa do valor do coeficiente de atrito (f) pode ser feita utilizando-se a Fig. 5.21. A curva B deve ser usada quando os materiais usados forem de excelente qualidade.

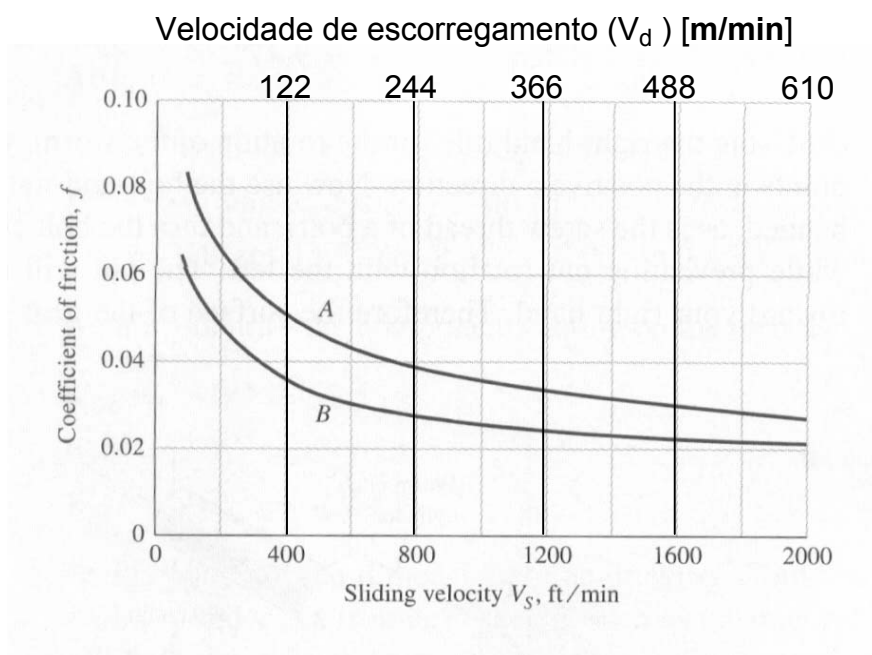


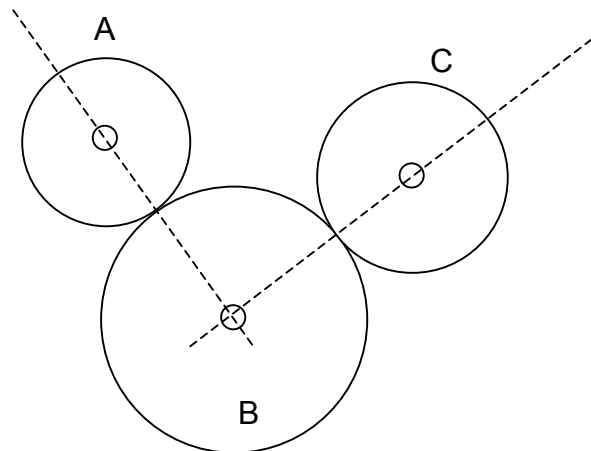
Fig. 5.21: Coeficiente de atrito no par sem fim – coroa

5.4 Considerações Finais

Razão de contato: Define o número de pares de dentes que estão simultaneamente em contato. Em geral as engrenagens possuem uma razão de contato maior que um. Uma razão de contato igual à unidade significa que haverá apenas um par de dentes em contato. Somente quando o contato deste par termina, inicia-se o seguinte. Isto provoca choques nas engrenagens. Para evitar estes choques utiliza-se um maior número de pares de engrenagens em contato simultâneo.

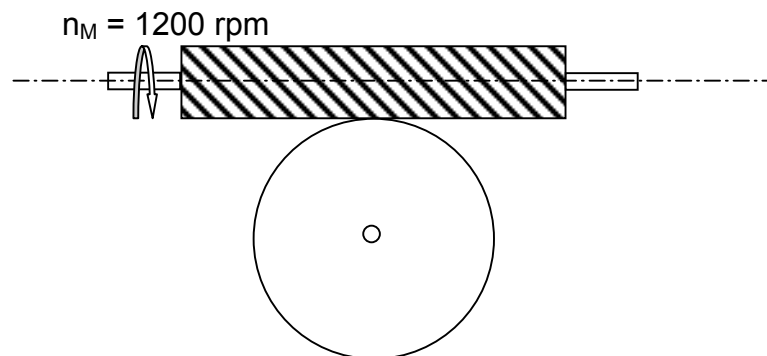
EXERCÍCIOS

1. A engrenagem A, com 25 dentes, está acoplada a um motor que transmite 3 kW a 600 rpm no sentido horário. As engrenagens B e C têm 65 e 55 dentes, respectivamente. O módulo destas engrenagens é igual a 6 mm. Todas as engrenagens são cilíndricas retas. Determine:
 - O torque que cada árvore transmite.
 - As forças atuantes em cada engrenagem. Faça um desenho esquemático mostrando estas forças.
 - Qual a influência existente nos cálculos acima, se a engrenagem B fosse retirada?

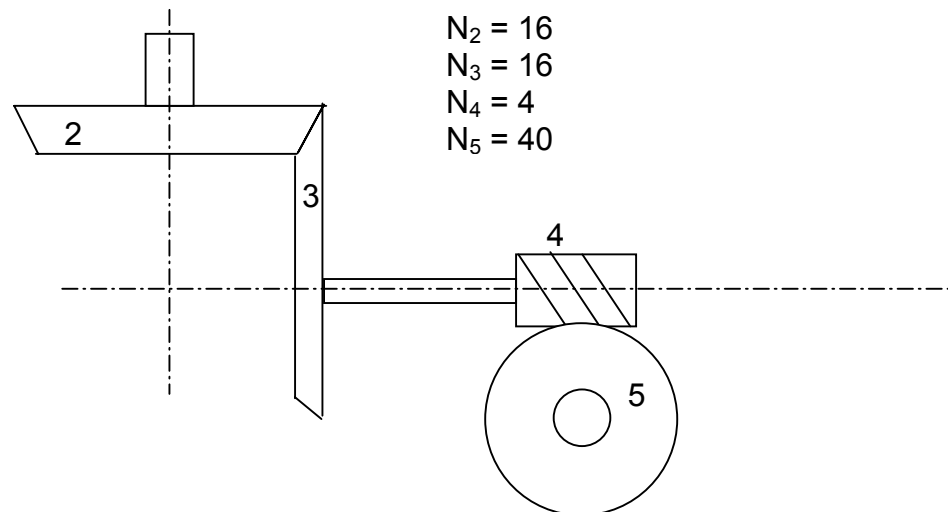


- 1.1) Determine o número mínimo de dentes que o pinhão A da figura acima poderá ter para que não haja interferência.

2. Uma engrenagem cilíndrica helicoidal tem 85 dentes, ângulo de ação normal de 20° , ângulo de inclinação da hélice de 30° e módulo normal de 5 mm. Esta engrenagem deverá ser acoplada a um pinhão que transmite 5 kW a 1150 rpm. O número de dentes do pinhão é o mínimo necessário para que não haja interferência. Determine:
- O número de dentes do pinhão.
 - As forças atuantes nas engrenagens.
 - Faça um desenho esquemático destas forças atuantes no dente.
 - Se esta engrenagem fosse transformada em uma engrenagem cilíndrica reta, com todas as características idênticas à engrenagem helicoidal anterior, exceto o ângulo da hélice, quais seriam as forças atuantes? Faça uma comparação entre estas engrenagens.
3. Uma par de engrenagens cônicas tem relação de transmissão de 4/3. O diâmetro primitivo do pinhão é de 150 mm. O pinhão gira com 240 rpm. O módulo das engrenagens é de 5 mm, ângulo de ação de 20° . Determine as forças atuantes nos dentes das engrenagens, se uma potência de 6 kW é transmitida.
4. Um parafuso sem fim transmite 6 kW a 1200 rpm a uma engrenagem helicoidal de módulo normal igual a 20 mm. O diâmetro primitivo do parafuso sem fim é de 71,26 mm e tem três entradas. A engrenagem helicoidal tem 60 dentes e ângulo de ação normal de 20° . O coeficiente de atrito $f = 0,10$. Determine as forças atuantes no sem fim e na engrenagem. Faça um desenho mostrando estas forças.



5. A figura abaixo mostra um trem de engrenagens constituído por um par de engrenagens cônicas com 16 dentes cada uma, um parafuso sem fim com 4 entradas, coeficiente de atrito $f = 0,12$ e uma engrenagem helicoidal com 40 dentes. Um motor acoplado ao eixo da engrenagem 2 transmite 5,5 kW com 250 rpm (sentido horário). São conhecidos: ângulo de ação = 25° . Ângulo de inclinação da hélice = 30° . Módulos = 3,0 mm. Determine:
- As forças atuantes em todas as engrenagens.
 - A velocidade de saída (na engrenagem 5).
 - O sentido de rotação na engrenagem 5.
 - A potência disponível na árvore da engrenagem 5



6. Uma máquina necessita de uma potência de no mínimo 7,8 kW e velocidade de 210 rpm. Proponha um redutor constituído por engrenagens cilíndricas retas que serão acopladas entre a máquina e um motor. O rendimento de cada par de engrenagens é de 99%. O motor a ser acoplado gira com 1200 rpm. Determine a potência do motor.